Exercice 1. sur 6 points

Une usine produit de l'eau minérale en bouteilles. Lorsque le taux de calcium dans une bouteille est inférieur à 6,5 mg par litre, on dit que l'eau de cette bouteille est très peu calcaire.
Dans cet exercice, les résultats approchés seront arrondis au millième.

Partie A.

L'eau minérale provient de deux sources, notée "source A" et "source B".
La probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source A soit très peu calcaire est 0,17.
La probabilité qu'une bouteille prélevée au hasard dans la production d'une journée de la source B soit très peu calcaire est 0,10.
La source A fournit 70% de la production quotidienne totale des bouteilles d'eau et la source B fournit le reste.
On prélève au hasard une bouteille d'eau dans la production totale de la journée et on considère les évènements suivants :

A : "La bouteille d'eau provient de la source A".
B : " La bouteille d'eau provient de la source B".
C : "L'eau contenue dans la bouteille d'eau est très peu calcaire".

1) Déterminer la probabilité de l'évènement $A \cap C$.
2) Montrer que la probabilité de l'évènement C vaut 0,149.
3) Calculer la probabilité que l'eau contenue dans une bouteille provienne de la source A sachant qu'elle est très peu calcaire.

Partie B.

On prélève 5 bouteilles au hasard dans la production et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de bouteilles d'eau dont l'eau est très peu calcaire.

1) Déterminer la probabilité que 2 bouteilles exactement contiennent une eau très peu calcaire.
3) Déterminer la probabilité $P(X \leq 3)$.

Partie C.

Le service commercial a adopté pour les étiquettes des bouteilles la forme représentée sur le schéma fourni en annexe dans un repère orthonormé du plan.
La forme de ces étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe C d'équation $y = a\cos x$ avec $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et $a \in \left]0;+\infty\right[$.
Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs.
On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$.
On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe C lorsque a est inférieur à 1,4.

1) Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$ et la courbe C est égale à 2a unités d'aire.
2) Pour des raisons esthétiques on souhaite que l'aire du disque soit égale à la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?

Exercice 2. 4 points .

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $(z-2)(z^2-2z+4)=0$

2) On considère les points A; B; C; D et E d'affixes respectives :

$$z_A = 2 \qquad z_B = 1+i\sqrt{3} \qquad z_C = \overline{z_B} \qquad z_D = 2e^{2i\frac{\pi}{3}} \qquad z_E = -2ie^{-i\frac{\pi}{6}}$$

a) Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_A et z_B.

b) Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

c) Donner le module et un argument de z_C

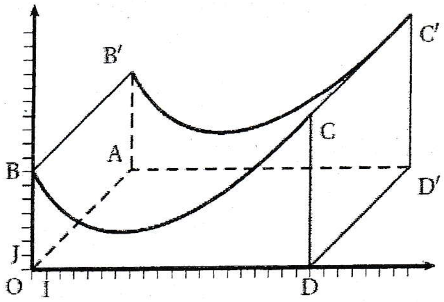
d) Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes z_D et z_E.

3) a) Expliquer pourquoi les points A; B; C; D et E sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b) Tracer le cercle dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ sur votre copie.

c) Placer les points A; B; C; D et E dans votre repère.

Exercice 3 sur 5 points.

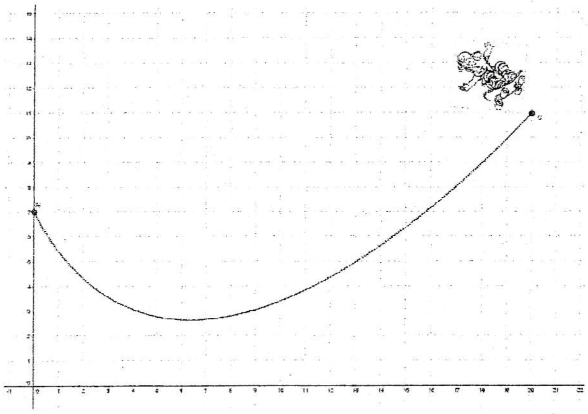


Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD'D; DD'C'C et IAB'B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O; I; J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 m autrement dit DD' = 10m et sa longueur OD est de 20m.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;20]$ par $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$

On note f ' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O; I; J).

Partie 1.



1) Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0;20]$
on a : $f'(x)=\ln(x+1)-2$.

2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0;20]$ et dresser son tableau de variation.

3) Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

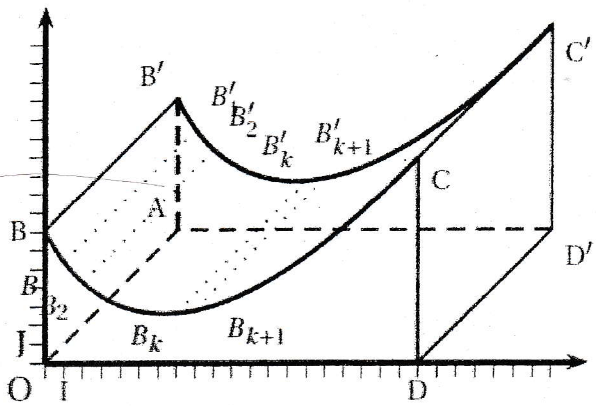
La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4) Les deux propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier vos réponses.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8m0.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

Partie 2.



On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de la surface à peindre, on considère dans le repère (O; I; J) du plan de face les points $B_k(k;f(k))$ pour k allant de 0 à 20. Ainsi $B_0=B$ et $B_{20}=C$.
On décide d'approcher l'arc de la courbe C allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$
Ainsi la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles de type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B'_k$ comme illustré sur la figure ci-contre.

1) Démontrer que pour tout entier k allant de 0à 19 , $B_kB_{k+1}=\sqrt{1+(f(k+1)-f(k))^2}$

2) Compléter l'algorithme figurant en annexe pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Exercice 4 sur 5 points. (OBLIGATOIRE)

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}$$

1) Calculer d_1 et a_1 puis d_2 et a_2

2) A l'aide d'un tableur on a obtenu les 21 premiers termes de ces deux suites. Quelles conjectures pouvez-vous émettre les concernant ?

3) Pour tout entier n, on pose $e_n = d_n - 200$.

a) Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) On admet que pour tout entier naturel n :

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340$$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, on a $2n^2 \geq (n+1)^2$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 4$, on a $2^n \geq n^2$.

c) En déduire que que pour tout entier $n \geq 4$, on a :

$$0 \leq 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{100}{n}$$

d) Etudier la convergence de la suite (a_n)

n	dn	an
0	300	450
1	250	445
2	225	417,5
3	212,5	391,25
4	206,25	371,875
5	203,125	359,0625
6	201,5625	351,09375
7	200,78125	346,328125
8	200,390625	343,554688
9	200,195313	341,972656
10	200,097656	341,083984
11	200,048828	340,59082
12	200,024414	340,319824
13	200,012207	340,172119
14	200,006104	340,092163
15	200,003052	340,049133
16	200,001526	340,026093
17	200,000763	340,013809
18	200,000381	340,007286
19	200,000191	340,003834
20	200,000095	340,002012

Exercice 4 sur 5 points. (SPÉ)

Partie A Autour du 51...

1) a) Etudier les restes de la division de 51^n par 26 suivant les valeurs de n.

2) a) Quel est le reste de la division de 51^{2016} par 26 ?

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $A_n = 1+51+51^2+...+51^{n-1}$. On a ainsi $A_{2016} = 1+51+51^2+...+51^{2015}$

Déduire des questions précédentes que A_{2016} est divisible par 26. Autrement dit que $A_{2016} \equiv 0(26)$

Partie B. En terrain connu.

On fait correspondre à chaque lettre de l'alphabet un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Afin de coder une lettre de l'alphabet, correspondant à un entier x entre 0 et 25, On définit une fonction de codage f par $f(x) = y$ où y est le reste de la division euclidienne de 51x + 1 par 26

La lettre de l'alphabet correpondant à l'entier x est ainsi codée par la lettre corrspondant à l'entier y.

1) Coder "GO"

2) Démontrer que $51x+1 \equiv y(26) \Leftrightarrow x \equiv 25y+1(26)$

3) Décoder "NR"

Partie C Avec une matrice.

On se demande ce qui se passe si l'on applique plusieurs fois d'affilée la fonction de codage à une même lettre.

1) Vérifier qu'on obtient un codage identique à celui de la partie B en codant la lettre de rang x par le reste y de la division euclidienne par 26 du coefficient a_{11} de la matrice produit de $M = \begin{pmatrix} 51 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Calculer à la machine M^2 et M^3 et vérifier que $M^3 = \begin{pmatrix} 51^3 & 1+51+51^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

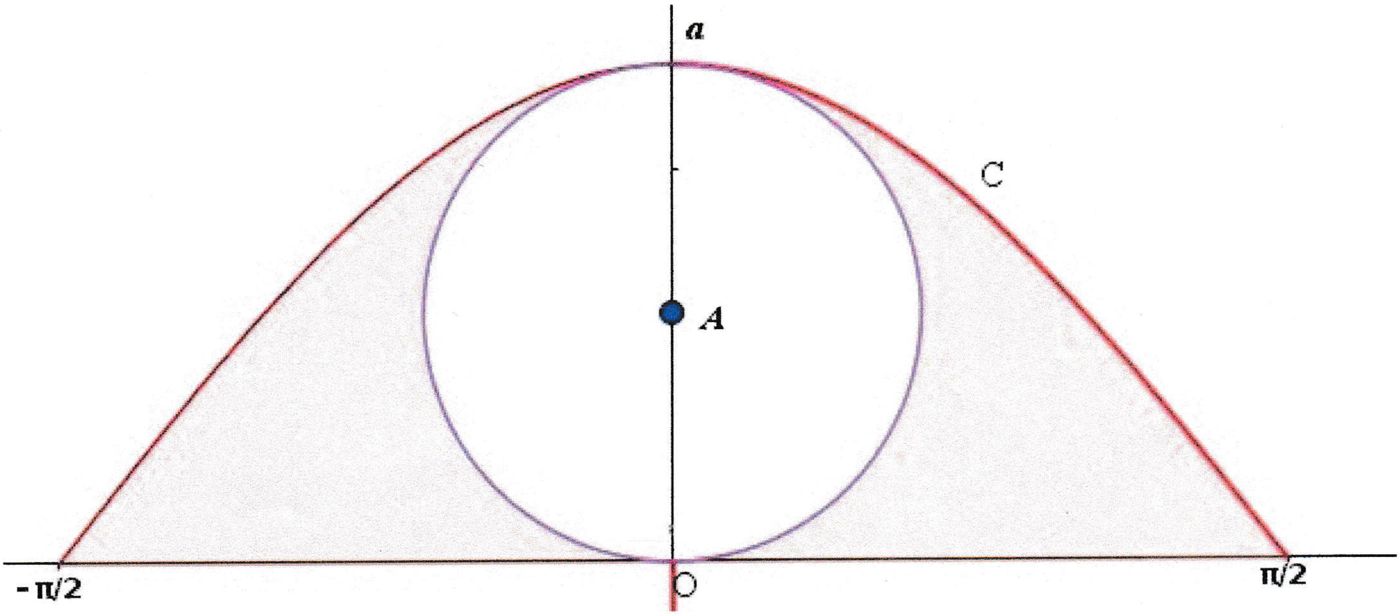
3) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$: $M^n = \begin{pmatrix} 51^n & 1+51+...+51^{n-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51^n & A_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) Que se passe-t-il si l'on applique à une lettre quelconque 2016 fois de suite la fonction de codage ?

Annexe à désagrafer et à rendre avec votre copie.

Nom :
Prénom :

Annexe : courbe exercice 1.



Annexe : algorithm à compléter exercice 3.

Variables Fonction	S : réel K : entier f : définie par $f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7$
Traitement	S prend la valeur 0 Pour K variant de … à … S prend la valeur … Fin Pour
Sortie	Afficher …